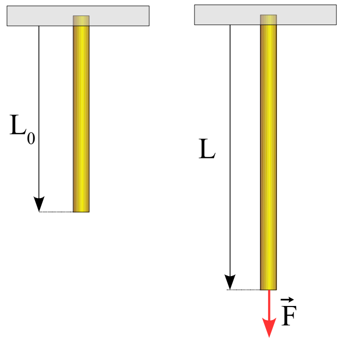
ÉTUDE D'UN FIL ÉLASTIQUE

1) Equation d'état.

L'état d'un fil élastique peut être décrit à l'aide de deux variables indépendantes, sa température T et la force de traction F exercée sur son extrémité libre.
L'étude expérimentale montre que la longueur L du fil dépend de ces deux variables:

- loi de la dilatation linéaire : $\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F = \Lambda L_0$.
  Λ = coefficient de dilatation linéaire.
- loi de l'élasticité (HOOKE): $\left(\frac{\partial L}{\partial F}\right)_T = \frac{1}{k}$.
  k = coefficient de dureté (ou raideur).



Etat initial
L_0, T_0, F=0

Etat final
L, T, F

Dans une étude simplifiée on admettra que ces deux coefficients sont constants.

$$dL = \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F dT + \left(\frac{\partial L}{\partial F}\right)_T dF = \Lambda L_0 dT + \frac{1}{k} dF \;\Rightarrow\; L = \Lambda L_0 T + \frac{F}{k} + \text{constante}.$$

D'après l'état initial choisi $L_0 = \Lambda L_0 T_0 + \text{cste}$ d'où l'équation d'état du fil: $\mathbf{L = L_0 + \Lambda L_0 (T - T_0) + \frac{F}{k}}$.

2) Relations de Clapeyron et de Mayer.

a. Variables T et L.

$\delta W = F\,dL$ en négligeant le travail des forces pressantes ; $\delta Q = m c_L dT + \ell dL$.

$$\left.\begin{aligned} dU &= m c_L dT + (\ell + F) dL \\ dS &= m c_L \frac{dT}{T} + \frac{\ell}{T} dL \end{aligned}\right] \Rightarrow \ell = -T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_L \quad \text{et} \quad m\left(\frac{\partial c_L}{\partial L}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_L.$$

L'équation d'état s'écrit aussi $F = k\left[L - L_0 - \Lambda L_0 (T - T_0)\right]$ d'où $\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_L = k \Lambda L_0$.

$$\boldsymbol{\left(\frac{\partial c_L}{\partial L}\right)_T = 0 \qquad \ell = k \Lambda L_0 T}$$

b. Variables T et F.

$\delta W = F dL = F\left(\Lambda L_0 dT + \frac{1}{k} dF\right)$; $\delta Q = m c_F dT + h dF$; $dS = m c_F \frac{dT}{T} + \frac{h}{T} dF$.

On peut aussi exprimer dU et, par un calcul analogue au précédent, en déduire h et $\left(\frac{\partial c_F}{\partial F}\right)_T$.

Mais si on a déjà calculé ℓ, il est préférable d'en déduire h avec $h = \ell\left(\frac{\partial L}{\partial F}\right)_T$.

$$h = -T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_L \left(\frac{\partial L}{\partial F}\right)_T \;;\; h = T\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F = \Lambda L_0 T.$$

A partir de dS, on obtient $m\left(\frac{\partial c_F}{\partial F}\right)_T = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_F - \frac{h}{T} = 0$.

Remarque: enthalpie généralisée.
Si l'expression du travail élémentaire s'écrit $\delta W = X dx + Y dy + Z dz$ où (X, x), (Y, y), (Z, z) sont des couples de variables conjuguées, on définit l'enthalpie généralisée du système par $H = U - X x - Y y - Z z$.
Pour le fil élastique $\delta W = F\,dL$ d'où $H = U - FL$; $dH = \delta Q - L dF = m c_F dT + (h - L) dF$.
On peut calculer directement h en exprimant que dH et dS sont des différentielles.

c. Relation de Mayer.

$$m(c_F - c_L) = \ell\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F = -T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_L \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F = k \Lambda^2 L_0^2 T.$$

On en déduit $\left(\frac{\partial c_L}{\partial F}\right)_T = 0$ et $\left(\frac{\partial c_F}{\partial L}\right)_T = 0$. Donc c_F et c_L ne dépendent que de T.

3) Énergie interne et entropie.

$$dU = (m c_F + \Lambda L_0 F)dT + \left(\Lambda L_0 T + \frac{F}{k}\right)dF = d\left(mc_F T + \Lambda L_0 FT + \frac{F^2}{2k}\right) \text{ si on admet que } c_F \text{ est constant.}$$

$$U = m c_F T + \Lambda L_0 FT + \frac{F^2}{2k} + \text{cste} \quad \text{avec} \quad U_0 = m c_F T_0 + \text{cste} \;\Rightarrow\; \mathbf{U = U_0 + m c_F (T - T_0) + \Lambda L_0 FT + \frac{F^2}{2k}}$$

$$dS = m c_F \frac{dT}{T} + \Lambda L_0 dF.$$

$$S = m c_F \ln T + \Lambda L_0 F + \text{cste} \quad \text{avec} \quad S_0 = m c_F \ln T_0 + \text{cste} \;\Rightarrow\; \mathbf{S = S_0 + m c_F \ln\frac{T}{T_0} + \Lambda L_0 F}$$

4) Application : traction du fil de F = 0 à F = 500 N.

Etat initial :		Etat final :	
	$L_0 = 1$ m		L_1
	$T_0 = 273$ K		T_1
	$F = 0$		$F_1 = 500$ N
	U_0		U_1
	S_0		S_1

Le fil est en acier, cylindrique, de diamètre $d = 1$ mm ; masse volumique $\mu = 7{,}8$ g cm^{-3}.

$\Lambda = 1{,}2\ 10^{-5}$ K^{-1} ; $k = 1{,}5\ 10^5$ N m^{-1} ; $c_F = 0{,}46$ J g^{-1} K^{-1}.

a. Fil non isolé thermiquement.

Dans l'état final, le fil retrouve sa température initiale, $T_1 = T_0$ (transformation monotherme).

$$L_1 = L_0 + \frac{F_1}{k} = 1 + \frac{500}{1{,}5\ 10^5} = 1 + \frac{1}{3}10^{-2} = 1{,}0033 \text{ m.}$$

$$\Delta U = U_1 - U_0 = \Lambda L_0 F_1 T_0 + \frac{F_1^2}{2k} = 1{,}2\ 10^{-5}\times 500\times 273 + \frac{25\ 10^4}{3\ 10^5} = 1{,}638 + 0{,}833 = 2{,}471 \text{ J.}$$

$$\Delta S = S_1 - S_0 = \Lambda L_0 F_1 = 0{,}006 \text{ J K}^{-1}.$$

- Traction isotherme réversible :

$W_{rév} =$ $\qquad\qquad$ $\Delta S_{source} =$

$Q_{rév} =$ $\qquad\qquad$ $\Delta S_{univers} =$

- Traction brusque :

$W_{irr} =$ $\qquad\qquad$ $\Delta S_{source} =$

$Q_{irr} =$ $\qquad\qquad$ $\Delta S_{univers} =$

b. Fil isolé thermiquement : traction adiabatique.

- Traction réversible :

- Traction brusque :