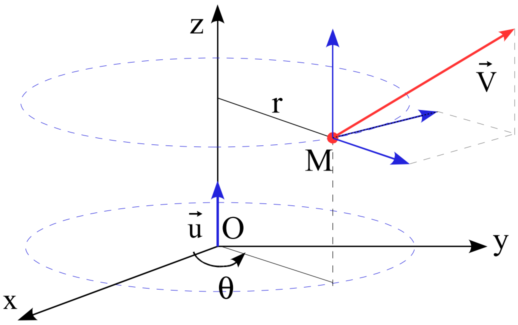
ROTATION D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE

1) Moment d'un vecteur par rapport à un axe.

a. Définition.

Le moment d'un vecteur $\vec{V}$ par rapport à un axe (Δ) est égal à la composante du moment de $\vec{V}$ calculé en un point O quelconque de l'axe: $\mathcal{M}_\Delta(\vec{V}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{V})\cdot\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire de (Δ).

Soit M l'origine du vecteur $\vec{V}$ et $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$ le vecteur position de M en coordonnées cylindro-polaires d'origine O et d'axe Oz confondu avec (Δ): $\vec{u} = \vec{e}_z$.



$\vec{V} = V_r\,\vec{e}_r + V_\theta\,\vec{e}_\theta + V_z\,\vec{e}_z$.

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{V}) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{V} = \left(r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z\right)\wedge\left(V_r\,\vec{e}_r + V_\theta\,\vec{e}_\theta + V_z\,\vec{e}_z\right)$.

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{V}) = -zV_\theta\,\vec{e}_r + (zV_r - rV_z)\,\vec{e}_\theta + rV_\theta\,\vec{e}_z$.

$\boldsymbol{\mathcal{M}_\Delta(\vec{V}) = r\,V_\theta}$

b. Exemples.

Si $\vec{V}$ est un vecteur force $\vec{F}$, $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = r\,F_\theta$, cette quantité représente l'aptitude de $\vec{F}$ à faire tourner M autour de l'axe (Δ), F_r tendant à le déplacer radialement et F_z à le translater parallèlement à (Δ).

Si le mouvement de M est une rotation autour de (Δ), le travail élémentaire de $\vec{F}$ se réduit à celui de la composante orthoradiale F_θ, $\delta W(\vec{F}) = F_\theta\, r\, d\theta = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})\,d\theta$ d'où la puissance de $(\vec{F})$: $P(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})\dot{\theta}$.

Si $\vec{V}$ est le vecteur quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ du point M, $\mathcal{M}_\Delta(\vec{p})$ est le moment cinétique du point par rapport à (Δ), noté aussi L_Δ, d'où $L_\Delta = r\,m\,v_\theta = mr^2\dot{\theta}$.

La grandeur $J_\Delta = m\,r^2$ est le **moment d'inertie** du point par rapport à l'axe (Δ).

2) Énergie cinétique de rotation d'un solide.

Pour un système matériel quelconque: $E_c = \dfrac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$.

Les points matériels d'un solide en rotation autour d'un axe fixe ont tous la même vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ telle que $v_i = \omega\, r_i$, d'où $E_c = \dfrac{1}{2}\sum m_i \omega^2 r_i^2 = \dfrac{1}{2}\omega^2 \sum m_i r_i^2 = \dfrac{1}{2}J_\Delta\omega^2$ avec $J_\Delta = \sum m_i r_i^2$ = moment d'inertie du solide.

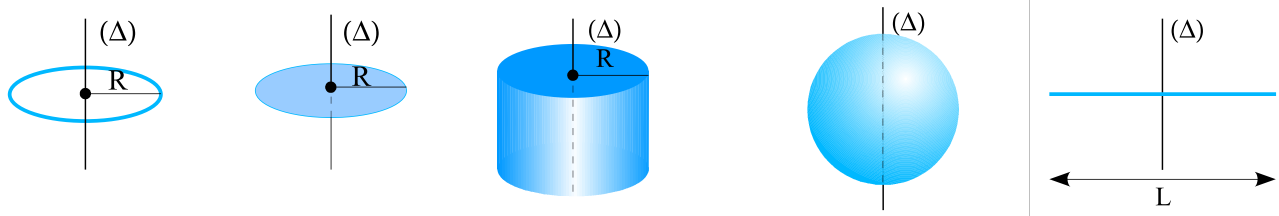
3) Théorème du moment cinétique.

Pour un système matériel quelconque $\dfrac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta ext}$ où $\mathcal{M}_{\Delta ext}$ est le moment résultant par rapport à (Δ) des forces extérieures appliquées au solide.

Or pour un solide en rotation, $L_\Delta = \sum_i m_i r_i^2\,\omega = J_\Delta\omega \Rightarrow \boldsymbol{J_\Delta \dfrac{d\omega}{dt} = J_\Delta\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{\Delta,ext}}$.

4) Exemples simples de calcul de moment d'inertie:

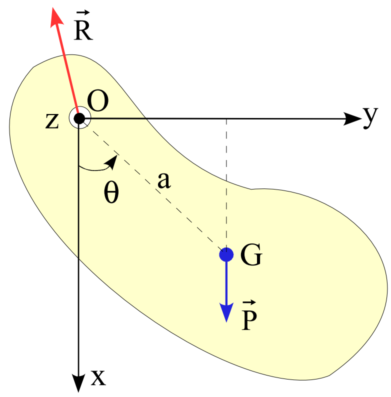
solides homogènes, de masse M, ayant un axe de révolution (Δ)



cercle	disque	cylindre	sphère	tige
$J_\Delta = MR^2$	$J_\Delta = \dfrac{1}{2}MR^2$	creux : $J_\Delta = MR^2$	creuse : $J_\Delta = \dfrac{2}{3}MR^2$	$J_\Delta = \dfrac{1}{12}ML^2$
		plein : $J_\Delta = \dfrac{1}{2}MR^2$	pleine : $J_\Delta = \dfrac{2}{5}MR^2$	

5) Applications.

a. Pendule pesant.

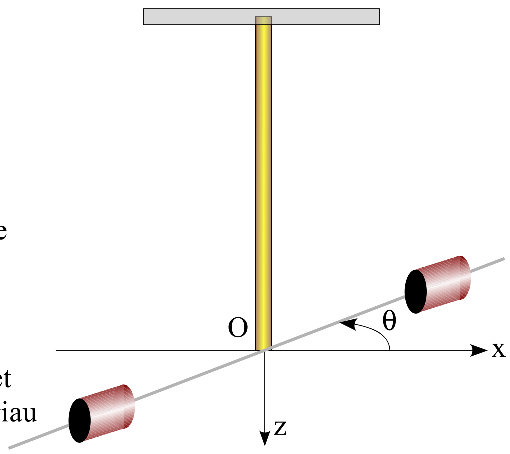


Un pendule pesant est un solide de forme quelconque mobile autour d'un axe horizontal fixe dans un référentiel galiléen, placé dans un champ de pesanteur uniforme.
Si l'on suppose que la rotation autour de l'axe se fait sans frottement, l'action de l'axe sur le solide se réduit à des forces de résultante $\vec{R}$ dont le support passe par l'axe donc de moment nul par rapport à cet axe.
Le moment résultant des forces extérieures est égal au moment du poids soit $\mathcal{M}_{\Delta,\text{ext}} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = -Mga\sin\theta$.
a = OG = distance du centre de masse à l'axe de rotation.

D'après le théorème du moment cinétique, le mouvement du pendule est donné par l'équation différentielle du second ordre : $J_\Delta\ddot{\theta} = -Mga\sin\theta$ ou $\ddot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{Mga}{J_\Delta}}$.
Dans le cas d'oscillations de faible amplitude $\sin\theta \approx \theta$, l'équation devient $\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta = 0$ dont la solution est de la forme $\theta = \theta_m\sin(\omega_0 t+\varphi)$, donc de période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{Mga}}$.
On remarque que dans ce cas la période est indépendante de l'amplitude θ_m des oscillations (isochronisme).
Si l'amplitude n'est pas très faible la période augmente avec l'amplitude comme le montre la relation approchée de Borda $T = T_0\left(1+\dfrac{\theta_m^2}{16}\right)$ valable à 2% près jusqu'à $\theta_m \approx 30°$.

✍ Retrouver l'équation différentielle du mouvement à partir du théorème de l'énergie cinétique.

b. Pendule de torsion.



Un pendule de torsion est un solide suspendu à un fil vertical, le centre de masse étant sur l'axe du fil, l'autre extrémité du fil étant maintenue fixe dans un support.
Quand le solide tourne autour de l'axe du fil, celui-ci réagit à la torsion en exerçant des forces de rappel équivalentes à un couple dont le moment par rapport à l'axe est proportionnel à l'angle de torsion : $\mathcal{M}_{\Delta,\text{couple}} = -C\theta$.

La constante C dite constante de torsion dépend de la longueur et du diamètre du fil (supposé cylindrique) et de la nature du matériau constituant le fil.

$C = k\dfrac{d^4}{L}$ | d: diamètre du fil
L: longueur du fil
k: constante caractéristique du matériau

Equation différentielle du mouvement: $J_\Delta\ddot{\theta} = -C\theta$ ou $\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{C}{J_\Delta}}$.

Le mouvement de rotation est donc sinusoïdal, de période $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{C}}$, indépendante de l'amplitude.

Remarque : le travail élémentaire des forces de rappel est égal à $\mathcal{M}_{\Delta,\text{couple}}\,d\theta = -C\theta\,d\theta = -d\left(\dfrac{1}{2}C\theta^2\right)$.

L'énergie potentielle de torsion vaut donc $E_p = \dfrac{1}{2}C\theta^2$, en prenant $E_p = 0$ quand $\theta = 0$, expression analogue à l'énergie potentielle élastique d'un ressort $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$.